Лекция 5 Непрерывность функции

Тлеулесова А.М.

1) *Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке.*

2) *Свойства функций, непрерывных на множестве.*

3) *Точки разрыва функции и их классификация.*

Непрерывные функции. Точки разрыва

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

1) $f(x)$ определена в точке x_0;

2) имеет конечный предел при $x \to x_0$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция непрерывна в каждой точке множества, то говорят, что функция непрерывна на множестве.

Определение 2. Если в некоторой точке a функция не является непрерывной, то говорят, что a - точка разрыва функции.

I. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

II. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то $f(x)$ сохраняет знак числа $f(x_0)$ в некоторой окрестности точки x_0.

III. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$, также непрерывны в точке x_0 (частное – при условии $g(x_0) \neq 0$);

IV. Пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $u=f(y)$ непрерывна в точке $b=\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $u=f(\varphi(x))=F(x)$ непрерывна в точке x_0. Это может быть записано в виде $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)\right]$, т.е. под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу;

V. Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Свойства функций, непрерывных в точке.

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма, произведение и частное (при условии $g(x_0) \neq 0$) являются функциями, непрерывными в точке x_0.

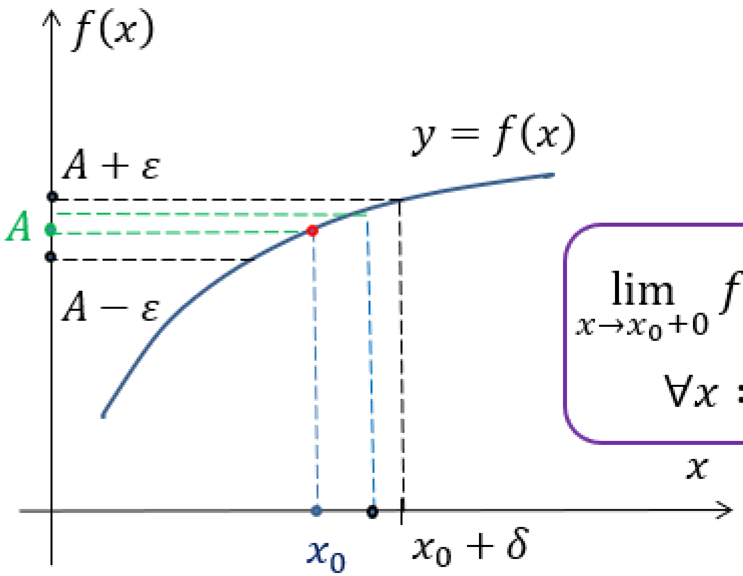
Теорема 2 (о стабилизации знака).
Если функция $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 и принимает в этой точке положительное (отрицательное) значение, то существует окрестность точки x_0, в которой значение функции остается положительным (отрицательным).

Теорема 3. Если функция f непрерывна в точке x_0, а функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция (композиция) $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 4. Все элементарные функции непрерывны в естественной области определения.

Теорема 5. (первая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция ограничена на этом отрезке.

Понятие **право**стороннего предела функции в точке (по КОШИ)



Определение
с помощью кванторов:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A, \text{если } \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta(\varepsilon) > 0 \text{ такое, что}$$
$$\forall x:\; x_0 < x < x_0 + \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |f(x) - A| < \varepsilon$$

Число A наз. пределом функции $f(x)$ в точке x_0 **СПРАВА** и обозначается:

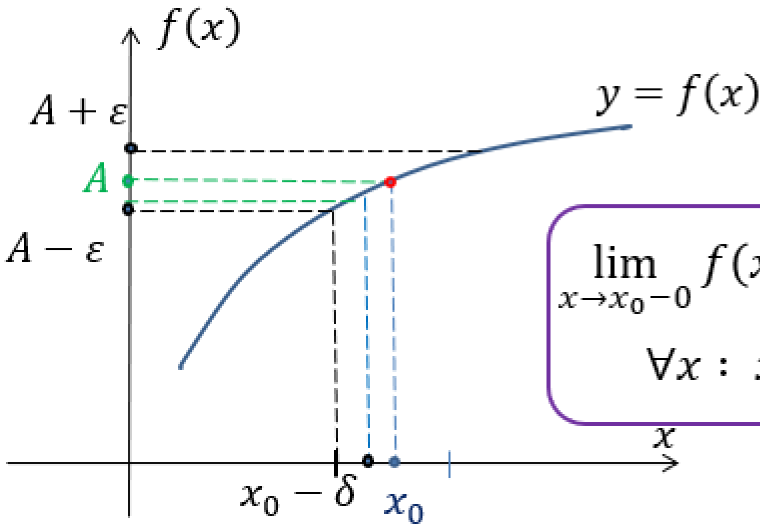
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A,$$

если для любого положительного числа ε найдется положительное число $\delta(\varepsilon)$ такое, что

как только x принимает значение из **ПРАВОЙ** $\delta -$ полуокрестности точки x_0,

соответствующее значение функции $f(x)$ попадает внутрь ε-окрестности числа A.

Понятие **лево**стороннего предела функции в точке (по КОШИ)



Определение
с помощью кванторов:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A, \text{если } \forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta(\varepsilon)>0 \text{ такое, что}$$
$$\forall x:\ x_0-\delta(\varepsilon)<x<x_0 \ \Rightarrow\ |f(x)-A|<\varepsilon$$

Число A наз. пределом функции $f(x)$ в точке x_0 **СЛЕВА** и обозначается:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A\ ,$$

если для любого положительного числа ε найдется положительное число $\delta(\varepsilon)$ такое , что

как только x принимает значение из **ЛЕВОЙ** δ – полуокрестности точки x_0,

соответствующее значение функции $f(x)$ попадает внутрь ε-окрестности числа A.

Понятие точки разрыва и их классификация

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Точка x_0 называется точкой разрыва, если

в ней **нарушается** условие непрерывности:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \cancel{\neq} \lim_{x\to x_0+0} f(x) \cancel{\neq} \lim_{x\to x_0} f(x) \cancel{\neq} f(x_0);$$

первого рода ← Точки разрыва → ***второго рода***

I ***рода*** | II ***рода***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Точка x_0 называется точкой разрыва ***первого рода***, если оба односторонних предела (левый и правый) ***КОНЕЧНЫ***:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = const.$$
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = const.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Точка x_0 называется точкой разрыва ***второго рода***, если хотя бы один из односторонних пределов (левый, правый или оба) равен ***БЕСКОНЕЧНОСТИ***$(\pm\infty)$.

Классификация

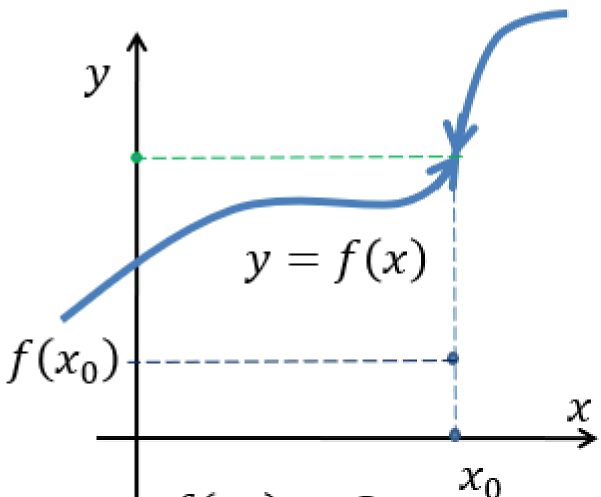
точек разрыва I (***первого***) ***рода***

Точка разрыва ***первого рода*** называется точкой ***устранимого разрыва***, если

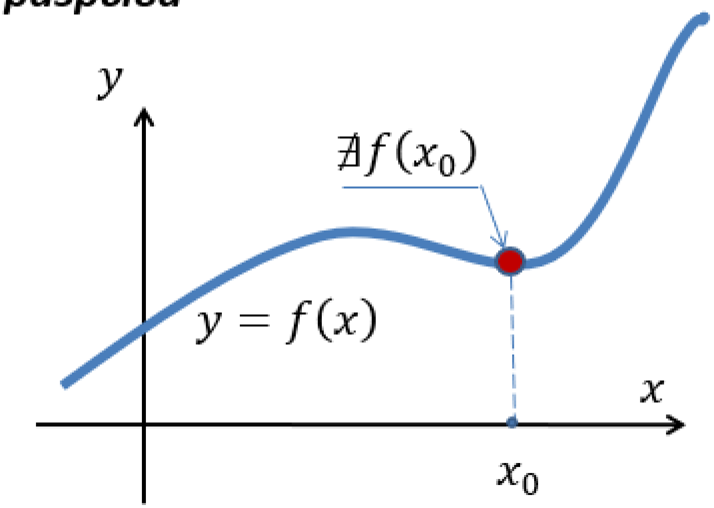
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = C = const.;$$

в этой точке предел слева равен пределу справа.

В точке ***устранимого разрыва***



$f(x_0) \neq C$



$\nexists f(x_0)$

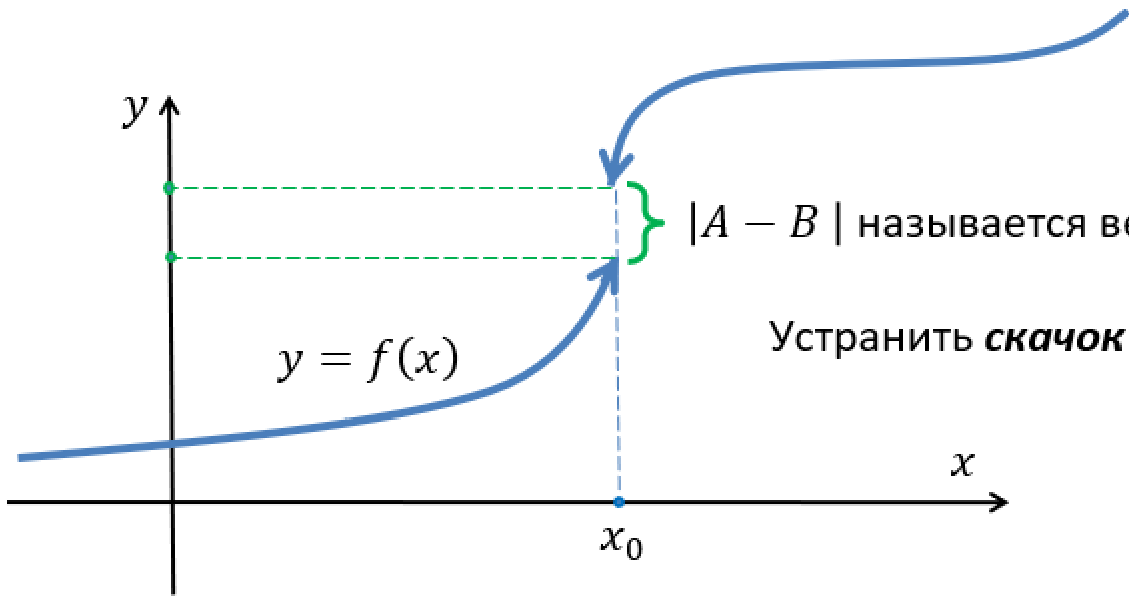
значение функции ***не равно*** односторонним пределам **или** значение функции ***не существует***

Если переопределить $f(x_0) = C$, то разрыв ***устраняется***.

Классификация точек разрыва I (***первого***) ***рода***

Точка разрыва ***первого рода*** называется точкой ***скачка***, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \boldsymbol{A} = const.; \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \boldsymbol{B} = const.; \quad A \neq B$$

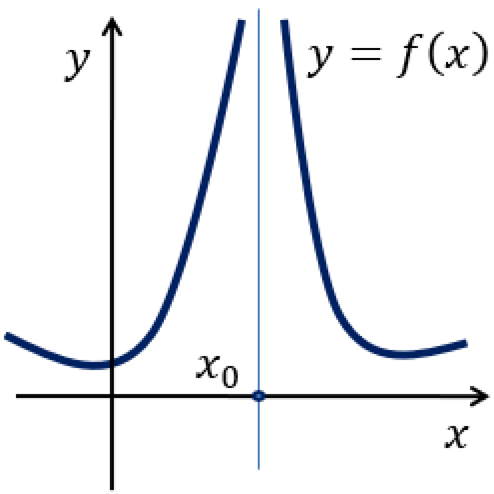


$|A - B|$ называется величиной ***скачка***

Устранить ***скачок*** **невозможно**

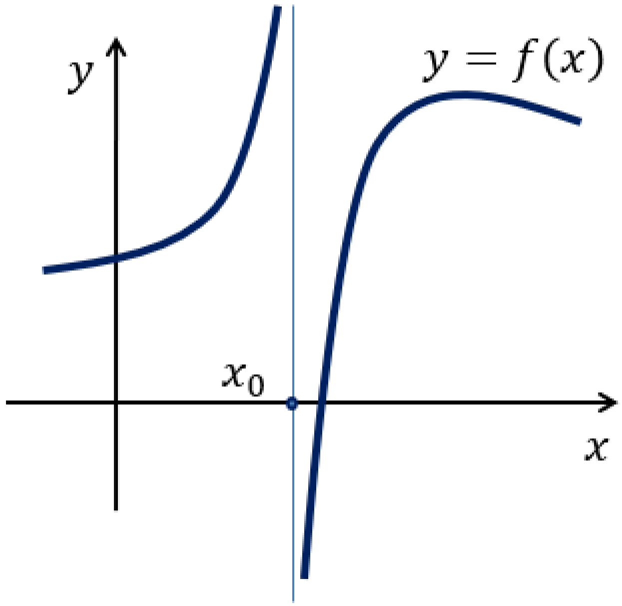
В точке ***скачка*** конечный предел слева не равен конечному пределу справа

Геометрические иллюстрации точек разрыва II (***второго***) ***рода***



$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$$

Определение характера точки разрыва

Найти точки разрыва функции $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3x-4}$ и определить их характер.

РЕШЕНИЕ: Область определения заданной элементарной функции:

$$x^2+3x-4 \neq 0$$

данная функция имеет **ДВЕ** точки разрыва:

$$x^2+3x-4=0 \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = -4$$

Исследуем характер разрыва в точке $x_1 = 1$, для этого вычислим

$$\lim_{x \to x_1 - 0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \lim_{x \to 1-0} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+4)} = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{(x+4)} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \to x_1 + 0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \lim_{x \to 1+0} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+4)} = \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{(x+4)} = \frac{1}{5}$$

Оба односторонних предела в точке $x_1 = 1$ существуют,
конечны,
равны между собой,
сама функция в точке $x_1 = 1$ НЕ существует (деление на НОЛЬ).

Поэтому точка $x_1 = 1$ – точка разрыва I (***первого***) ***рода*** (***устранимый разрыв***).

Исследуем характер разрыва в точке $x_2 = -4$:

$$\lim_{x\to x_2-0} f(x) = \lim_{x\to -4-0} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to -4-0} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+4)} = \lim_{x\to -4-0} \frac{1}{(x+4)} = \left[\frac{1}{-0}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to x_2+0} f(x) = \lim_{x\to -4+0} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to -4+0} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+4)} = \lim_{x\to -4+0} \frac{1}{(x+4)} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty$$

Односторонние пределы в точке $x_2 = -4$

обращаются в бесконечность,

поэтому точка $x_2 = -4$ – точка разрыва II (***второго***) ***рода***.